

Informations - Informationen - Informazioni - Notes

STUDIORUM PROGRESSUS

Ein (V, M) -Problem mit Nebenbedingung

Von H. BIERI, Bern

In Vol. 6, Seite 222, 1950, dieser Zeitschrift wurden diejenigen Rotationskörper von der festen Länge l ermittelt, welche bei vorgegebenem Volumen V die größte Oberfläche F aufweisen. Nun spielt in der Theorie der konvexen Körper eine dritte Maßzahl eine wichtige Rolle, nämlich M , das sogenannte *Integral der mittleren Krümmung*¹. Ich stelle deshalb folgendes Problem:

«Gesucht sind die konvexen Rotationskörper von der festen Länge l , welche bei vorgegebenem Volumen V das größte Integral der mittleren Krümmung M aufweisen.

Die Lösung lautet:

im Intervall $0 \leq V \leq V_1$ besitzen Zylinder,
im Intervall $V_1 < V < V_2$ besitzen Kegelstümpfe,
im Intervall $V_2 \leq V < \infty$ besitzen Kegel

die verlangte Eigenschaft.

V_1 hat den Wert

$$\frac{\pi^3 l^3}{24 \cdot 24}.$$

V_2 aber berechnet sich zu

$$\frac{\pi^3 l^3}{27} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 \varphi_2}{[\pi - \{2 \varphi_2 - \sin(2\varphi_2)\}]^2},$$

wo φ_2 die einzige Wurzel von $2\pi - 3[2\varphi - \sin(2\varphi)] = 0$ ist, die dem Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ angehört.

Die Extremalkörper sind durch Vorgabe von V eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir fassen zunächst nur die Klasse I₁ ins Auge², also Kegel, Kegelstümpfe und Zylinder von der festen Länge l . Für diese Körper gilt (Abb. 1):

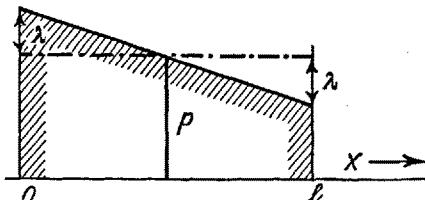


Abb. 1.

$$V = \frac{\pi l}{3} (3p^2 + \lambda^2), \quad (1)$$

$$M = \pi \left[l + \pi(p + \lambda) - 2\lambda \operatorname{arctg} \left(\frac{l}{2\lambda} \right) \right]$$

$$0 \leq p < \infty; \quad 0 \leq |\lambda| \leq p.$$

In einer (V, M) -Ebene lautet die Gleichung der Zylinderkurve ($\lambda = 0$):

$$\pi^3 V - l(M - \pi l)^2 = 0, \quad (2)$$

¹ H. HADWIGER, Über eine fehlende Ungleichung in der Theorie der konvexen Körper, El. Math. 2, 51 (1950).

² Die Klasseneinteilung ist in der eingangs zitierten Note erläutert worden. Die zugelassenen Körper setzen sich aus lauter Kegelstümpfen im weiteren Sinne zusammen. Der angehängte Index berechnet die Anzahl dieser Kegelstümpfe. In der Klasse I muß die Folge der Radien monoton abnehmend oder doch monoton nicht zunehmend sein. Für die Klasse II fällt diese Bedingung dahin.

die Gleichung der Kegelkurve ($|\lambda| = p$) in Parameterdarstellung:

$$V = \frac{4\pi l}{3} p^2; \quad M = \pi \left[l + 2\pi p - 2p \operatorname{arctg} \left(\frac{l}{2p} \right) \right]$$

$$0 \leq p < \infty. \quad (3)$$

Beide Kurven sind von unten konvex. Setzt man M aus (3) in (2) ein, so erhält man nach Umformung:

$$p^* = \frac{l}{2} \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi(3 - \sqrt{3})}{3} \right], \quad (4)$$

und es folgt weiter, daß die beiden Kurven rechts vom Nullpunkt genau einen Schnittpunkt mit den Koordinaten

$$V^* = \frac{\pi l^3}{3} \operatorname{ctg}^2 \left[\frac{\pi(3 - \sqrt{3})}{3} \right], \quad (5)$$

$$M^* = \pi l \left[1 + \frac{\pi \sqrt{3}}{3} \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi(3 - \sqrt{3})}{3} \right] \right]$$

aufweisen. Ferner verläuft die Kegelkurve im Intervall $0 < V < V^*$ oberhalb, im Intervall $V^* < V < \infty$ unterhalb der Zylinderkurve.

Zwecks Gewinnung der Enveloppe der zweiparametrischen Kurvenschar (1) führen wir mittels

$$\lambda = \frac{l}{2} \operatorname{ctg} \varphi; \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

einen neuen Parameter ein (vgl. Abb. 1) und erhalten als Nullstellen von

$$\frac{\partial V}{\partial p} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial M}{\partial p}.$$

$$(a) \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad p \text{ beliebig (Zylinderkurve, geometrischer Ort von Kurvenenden)} \quad (7)$$

$$(b) \quad p = \frac{\pi l}{6} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{[\pi - \{2\varphi - \sin(2\varphi)\}]}.$$

p besitzt die Randwerte $\pi l/24, \infty$ und nimmt, wenn φ von $\pi/2$ auf 0 fällt, monoton zu. Gemäß (1) verhalten sich M und V ebenfalls monoton, so daß die Enveloppe ein einfacher Kurvenbogen ist (Abb. 2).

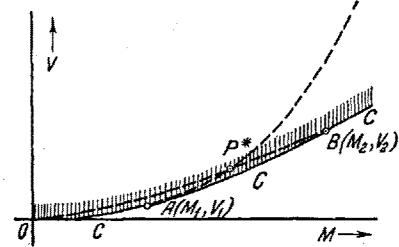


Abb. 2.

Nun ist aber noch die Bedingung $|\lambda| \leq p$ zu beachten (Abb. 1). Im Grenzfall sind die linken Seiten von (6) und (7 b) gleich, also müssen es auch die rechten sein. Nach einfacher Umformung resultiert:

$$3 = \frac{\pi}{\pi - [2\varphi - \sin(2\varphi)]} \quad (8)$$

bzw.

$$2\pi - 3[2\varphi - \sin(2\varphi)] = 0.$$

φ ist also auf das Intervall $\pi/2 \geq \varphi \geq \varphi_2$ zu beschränken, wo φ_2 die einzige, dem allein zulässigen Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ angehörende Wurzel von (8) ist.

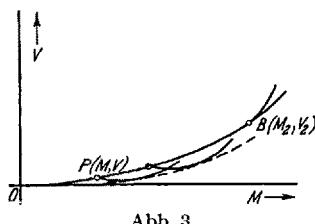


Abb. 3.

Daß der Enveloppenbogen \widehat{AB} (Abb. 2) mit der Kegelkurve nur den Punkt B gemeinsam hat, wird folgendermaßen nachgewiesen:

Die Steigung der Kegelkurve in P (Abb. 3) berechnet sich zu

$$\frac{dV}{dM} = \frac{4l}{3} \cdot \frac{p}{\left[\pi + \frac{2p}{4p^2 + l^2} - \arctg\left(\frac{l}{2p}\right) \right]}, \quad (9)$$

die Steigung der Kurve aus (1) mit $\lambda = \text{const}$, die in P entspringt, zu

$$\frac{dV}{dM} = \frac{2l}{\pi} p. \quad (10)$$

Die durch p dividierte Steigungsunterschied der beiden Kurven ist eine monotone Funktion von p . In der rechtsseitigen Umgebung von O steigt die Kegelkurve stärker an, für großes p schwächer, und in $B(M_2, V_2)$ herrscht Übereinstimmung der beiden Steigungen.

(1) vermittelt eine Abbildung der (p, λ) -Ebene auf die (M, V) -Ebene. Einem Abbildungssatz gemäß¹ darf behauptet werden, daß die Abbildung (1) keinen Bildpunkt liefert, der unterhalb des Kurvenzuges C der Abbildung 2 liegt.

Die Konvexität des Kurvenbogens \widehat{AB} (Abb. 2) ist nicht erwiesen. Dieser Umstand bedeutet gegenüber dem (F, V) -Problem eine Erschwerung und erfordert eine neue Beweisidee.

Wir sondern aus I_1 einparametrische Körperscharen aus, welche bei festem Äquatorradius zwischen Kegel und Zylinder interpolieren (Abb. 4).

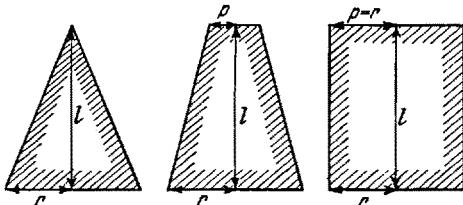


Abb. 4.

Irgendeine zugehörige Kurve mit den Endpunkten P (Kegel) und Q (Zylinder) liegt ganz nicht unterhalb C ,

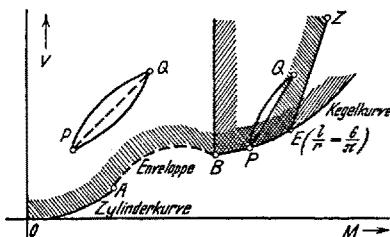


Abb. 5.

¹ H. BIERI, Dissertation (Bern, 1941).

da sie ja nur Bildpunkte von Körpern aus I_1 enthält (vgl. Abb. 2 und 5). Außerdem kann bewiesen werden, daß sie für $l/r \geq 6/\pi$ beständig von unten konvex ist.

Nun berechnet man (Abb. 5):

$$A: \frac{l}{r} = \frac{24}{\pi} \sim 7,6398,$$

$$B: \frac{l}{r} \sim 3,6388$$

[gemäß (7), (8)], andererseits ist $6/\pi \sim 1,910$, so daß E tatsächlich rechts von B liegt.

Solange demnach P und Q einem Gebiet mit dem untern Rand $OABEZ$ angehören, liegen Bogen und Strecke PQ ganz nicht unterhalb von C und dienen als Abschirmung nach unten. Wir betrachten nämlich die

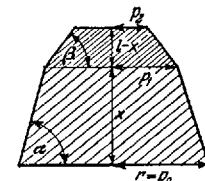


Abb. 6.

in Abbildung 6 angedeutete einparametrische Körperschar aus I_2 mit x als Parameter. Man berechnet:

$$V = \frac{\pi x}{3} (p_0^2 + p_0 p_1 - p_1 p_2 - p_2^2) + \frac{\pi l}{3} (p_1^2 + p_1 p_2 + p_2^2); \quad (11)$$

$$M = \pi \left[l + \pi p_0 - \left\{ (p_0 - p_1) \arctg\left(\frac{x}{p_0 - p_1}\right) + (p_1 - p_2) \arctg\left(\frac{l - x}{p_1 - p_2}\right) \right\} \right];$$

$$V_x = \text{const}; \quad M_x = \pi (\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha). \quad (12)$$

Mit wachsendem x nimmt α monoton zu, β monoton ab, und die betrachtete Kurve ist beständig konkav von unten. Liegt aber P nicht links von B auf der Kegelkurve, so liegt Q rechts von der Senkrechten durch B auf der Zylinderkurve, und man kann, weil die Kegelkurve ja konkav von unten ist, auf die Körperschar der Abbildung 4 füglich verzichten. Weitere Lagen des Punktpaares P, Q sind unmöglich, und man sieht ein, daß kein Doppelkegelstumpf aus I_2 extremal sein kann. Die vorliegende Schlußweise ist aber unbeschränkt anwendbar, und es erhellte, daß für die Klasse I der Kurvenzug C den untern Rand darstellt¹.

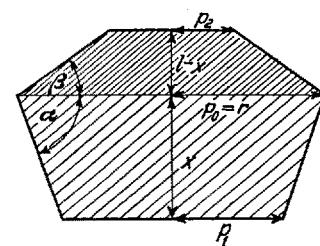


Abb. 7.

¹ Vergleiche hiezu die Ausführungen Seite 6 in der eingangs zitierten Arbeit, *Ein isoperimetrisches Problem mit Nebenbedingung*, Exper. 6, 222 (1950), wobei F durch M zu ersetzen ist.

Die Klasse II macht mehr Mühe. Zunächst lesen wir aus Abbildung 7 ab:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi x}{3} (p_1^2 + p_0 p_1 - p_0 p_2 - p_2^2) \\ &+ \frac{\pi l}{3} (p_0^2 + p_0 p_2 + p_2^2); \quad (13) \\ M &= \pi [l + \pi p_0 - \{ (p_0 - p_1) \operatorname{arctg} \alpha \\ &+ (p_0 - p_2) \operatorname{arctg} \beta \}]; \\ V_x &= \text{const}; \quad M_x = \pi [\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha]. \end{aligned}$$

Mit wachsendem x nimmt V monoton zu, M aber zuerst monoton ab und hernach ebenfalls monoton zu. Vom Umkehrpunkt weg ist die zugeordnete Kurve durchwegs von unten konkav, was rechts von der Senkrechten durch B zur Abschirmung nach unten hinreicht (Abb. 5).

Ferner zeigen wir, daß irgendein Doppelkegelstumpf aus II_2 nicht extremal sein kann, indem er durch einen Doppelkegel aus I_2 ersetzt wird, der bei gleichem Volumen größeres M besitzt. In der Tat lehrt Abbildung 8:

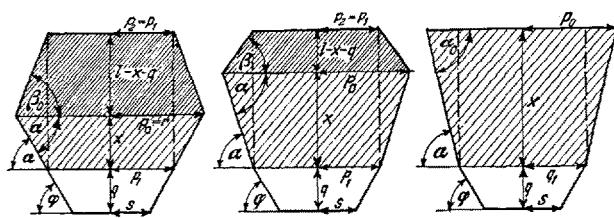


Abb. 8.

$$\begin{aligned} M &= \pi [l + \pi p_0 - (p_1 - s) \varphi \\ &- \{ (p_0 - p_1) \operatorname{arctg} \alpha + (p_0 - p_2) \operatorname{arctg} \beta \}]; \quad (14) \end{aligned}$$

$$M_x = \pi (\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha).$$

M_x nimmt mit wachsendem x monoton zu und besitzt die Randwerte

$$\begin{aligned} M_x(\alpha = \varphi) &= \pi (\cos^2 \beta_0 - \cos^2 \varphi); \\ M_x(\beta = 0) &= \pi \sin^2 \alpha_0 > 0 \end{aligned}$$

Es sind nur zwei Fälle zu unterscheiden:

- a) $\beta_0 < \varphi \rightarrow M_x(\alpha = \varphi) > 0,$
- b) $\beta_0 > \varphi \rightarrow M_x(\alpha = \varphi) < 0.$

Im ersten Fall ist M monoton. Im zweiten Fall aber nimmt diese Größe zunächst monoton ab bis zur Stelle $\beta = \alpha$, um hernach monoton zuzunehmen, wobei leicht zu sehen ist, daß der Endwert größer ist als der Anfangswert. Gerade das aber war zu zeigen.

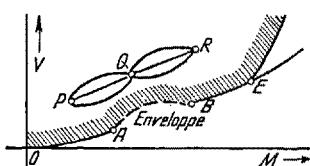


Abb. 9.

Schließlich lassen wir in (13) (Abb. 7) p_1 das Intervall $0 \leq p_1 \leq p_0$, dann p_2 das Intervall $0 \leq p_2 \leq p_0$ durchlaufen. Das Bild dieser Körperschar besteht, solange $x/r \geq 6/\pi$ bzw. $l - x/r \geq 6/\pi$ gilt¹, aus 2 beständig von unten konvexen Kurvenbogen, die nach den bisherigen Ausführungen ganz nicht unterhalb C liegen (Abb. 9). Dasselbe trifft für die Strecken PQ und QR zu, und wir haben neuerdings eine Abschirmung nach unten erreicht.

Jetzt wenden wir die in Abbildung 6 angedeutete Deformation mit x als Parameter unbeschränkt an und erreichen so, von einem passend gewählten Doppelkegelstumpf II_2 ausgehend, jeden Kegelstumpfkörper der Klasse II. Wegen der Konkavität jeder Verbindungscurve kann geschlossen werden, dass das Extremum von M nicht in der Klasse II zu finden ist. Damit ist der Beweis fertig.

Unsere Behauptungen lassen sich auch in Ungleichungen ausdrücken. Für konvexe Rotationskörper von der festen Länge l gilt folgendes System von Ungleichungen:

$$M \leq \pi \left[l + \sqrt{\frac{\pi V}{l}} \right]; \quad 0 \leq V \leq \frac{\pi^3 l^3}{24 \cdot 24}. \quad (1)$$

Gleichheitszeichen nur für Zylinder

$$\begin{aligned} 0 \leq p &\leq \frac{\pi l}{24}, \\ M &\leq \pi \left[l + \pi(p + \lambda) - 2\lambda \operatorname{arctg} \left(\frac{l}{2\lambda} \right) \right]; \quad (2) \end{aligned}$$

$$V = \frac{\pi l}{3} (3p^2 + \lambda^2);$$

$$p = p(\varphi); \quad \lambda = \lambda(\varphi); \quad \frac{\pi}{2} > \varphi > \varphi_2;$$

$$[\text{Vergleiche (6), (7), (8)}] \quad \frac{\pi l}{24} < p < p(\varphi_2).$$

$$M \leq \pi \left[l + \sqrt{\frac{3\pi V}{l}} - \sqrt{\frac{3V}{\pi l}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{l}{\sqrt{3V/\pi l}} \right) \right]^{(2)} \quad (3)$$

$$V_2 \leq V < \infty.$$

Gleichheitszeichen nur für Kegel

$$p(\varphi_2) \leq p < \infty.$$

Summary

The class of the convex rotatory bodies of the fixed length l is to be considered and it is shown, that for

$$\begin{aligned} 0 \leq V &\leq V_1 \quad \text{cylinders}, \\ V_1 < V &< V_2 \quad \text{conic trunks}, \\ V_2 \leq V &< \infty \quad \text{cones}, \end{aligned}$$

with firm volume demonstrate the greatest M .

The proof uses discussions of curves. The main difficulty consists in the fact, that a certain stretch of the picture is not always convex to beneath. [This difficulty was omitted at the analogic (V, F)-problem.]

¹ Und wenn die genannten Bedingungen nicht erfüllt sind, so reichen die Ausführungen über den Doppelkegelstumpf II_2 aus, um nachzuweisen, daß die Abschirmung nach unten erhalten bleibt.

² Die Extremaleigenschaft des Kegels in bezug auf M , gepaart mit denjenigen bezüglich F , spielt nach meinen Wahrnehmungen im Hauptproblem der konvexen Rotationskörper eine wichtige Rolle, auf welchen Umstand in einer demnächst erscheinenden Note eingegangen werden soll.